

LAHENDUSED 9. KLASS

1. Vastus. Villu kõndis kiirusega 6 km/h.

Lahendus:

Igal poisil kulus sihtkohta jõudmiseks 7 tundi. Kogu aeg keegi sõitis rulaga. Seega 7 tunni jooksul läbiti rulaga kokku $7 \text{ h} \cdot 9 \text{ km/h} = 63 \text{ km}$. Tähistame rulaga kolm korda läbitud teelõigu pikkuse tähega x . See on tegelikult täpselt selle teelõigu pikkus, mille Villu läbis rulaga.

Rulaga läbiti kokku $45 \text{ km} + 2 \cdot x \text{ km} = 63 \text{ km}$. Siit saame, et $x = 9 \text{ km}$.

Seega Villu sõitis rulaga 9 km, mis teeb ajaliselt ühe tunni. Ülejäänud $45 \text{ km} - 9 \text{ km} = 36 \text{ km}$ läbimiseks kulus Villul 6 tundi. Villu kõndimise kiirus oli $36 \text{ km} : 6 \text{ h} = 6 \text{ km/h}$.

Hindamine:

Tähelepanek, et kogu aeg keegi sõitis rulaga:	1p
Leitud rulaga läbitud teelõikude pikkuste kogusumma:	1p
Tähelepanek, et Villu poolt rulaga läbitud lõiku, läbiti rulaga kolm korda:	1p
Leitud Villu poolt rulaga läbitud teelõigu pikkus:	2p
Leitud Villu poolt kõndides läbitud vahemaa ja selleks kulunud aeg:	1p
Leitud Villu kõndimise kiirus:	<u>1p</u>
	7p

Märkus: Antud ainult õige vastus: 2p.

2. Vastus. Rea 2020. arv on 376.

Lahendus:

Olgu neli esimest arvu reas järjest a, b, c ja d . Olgu viies arv e , kuues f , seitsmes g ja kaheksas h . Et $a + b + c + d = 2020$ ja $b + c + d + e = 2020$, siis $a = e$. Samamoodi saame, et $f = b$, $g = c$ ja $h = d$.

Seega reas on arvud koguaeg järjestuses $a, b, c, d, a, b, c, d, a, \dots$.

Alati kui järjekorranumber jagub arvuga 4, siis seal on arv d . Kui järjekorranumber annab arvuga 4 jagamisel jäägi 3, on seal arv c , kui annab jagamisel arvuga 4 jäägi kaks, on seal arv b ning kui annab arvuga 4 jagamisel jäägi 1, on seal arv a .

Et $666 : 4 = 166$ jääk 2, siis $b = 412$.

Et $1097 : 4 = 274$ jääk 1, siis $a = 998$.

Et $11 : 4 = 2$ jääk 3 ja $101 : 4 = 25$ jääk 1, siis 11. ja 101. arvu summa on võrdne arvude a ja c summaga.

Et $22 : 4 = 5$ jääk 2 ja $220 : 4 = 55$, siis 22. ja 220. arvu summa on võrdne arvude b ja d summaga.

Teame, et $a + c = b + d + 444$ ja $a + b + c + d = 2020$ ning teame ka juba, et $a = 998$ ja $b = 412$.

Esimesest võrdusest saame, et $998 + c = 412 + d + 444$, millest $c - d = -142$ ehk arv d on arvust c suurem 142 võrra.

Teisest võrdusest saame, et $c + d = 2020 - 998 - 412 = 610$.

Neist kahest seosest kokku saame, et $c = (610 - 142) : 2 = 234$ ja $d = 234 + 142 = 376$.

Et $2020 : 4 = 505$, siis 2020. arv on d ehk 376.

Hindamine:

Näidatud, et reas on nelja erineva suurusega arve ja need paiknevad järjest ühesuguste rühmadena:	1p
Leitud neliku kaks esimest arvu:	2p
Leitud seos, et neliku esimese ja kolmanda arvu summa on 444 võrra suurem teise ja neljanda arvu summast:	1p
Leitud, et neljas arv on kolmandast 142 võrra suurem:	1p
Leitud neliku viimane arv, mis on ühtlasi viimane arv reas:	2p
	7p

Märkus: Antud vaid õige vastus: 2p

3. Vastus. Arv n vähim võimalik väärtus on 97.

Lahendus:

Arvud $(n + 1)$, $(n + 2)$, $(n + 3)$ ja $(n + 4)$ on neli järjestikust naturaalarvu.

Arv jagub arvuga $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$ siis, kui see jagub arvudega 4, 5 ja 101.

Kuna $(n + 1)$, $(n + 2)$, $(n + 3)$ ja $(n + 4)$ on neli järjestikust naturaalarvu, siis nende seas on kindlasti kaks paarisarvu ja nende korrutis jagub kindlasti arvuga 4.

Seega vähemalt üks teguritest peab olema arvu 101 kordne ja vähemalt üks peab olema arvu 5 kordne.

Küsitud on võimalikult väikest n väärtust, siis tegur $(n + 4)$ peab vastama kõige suuremale tegurile

Kui suurim tegur korrutises on arvu 101 vähim võimalik kordne, siis $n + 4 = 101$. Sel juhul $n + 3 = 100$ ja korrutis kindlasti jagubki arvudega 5 ja 101.

Sel juhul $n = 97$.

Hindamisjuhised.

Leitud arvu 2020 algteguriteks lahutus:	2p
Näidatud, et teguritest üks peab jaguma arvuga 101 ja üks arvuga 5:	2p
Põhjendatud, et see korrutis kindlasti jagub 4-ga või siis kontrollitud, et jagub:	1p
Vaadeldud kui $n + 4 = 101$ ja näidatud, et siis kõik tingimused on täidetud:	1p
Leitud n vähim võimalik väärtus:	<u>1p</u>
	7p

Märkus: Antud vaid õige vastus: 2p

4. Vastus. Ruudu külje pikkus on $\frac{9}{11}$ cm.

Lahendus:

Lahendus 1:

Joonestame diagonaalid AC ja DB , tähistame AN ja KC lõikepunkti tähega X ja diagonaalide lõikepunkti tähega O . Lõigud AN , KC ja DO on kolmnurga ACD mediaanid. Järelikult $DX = 2 \cdot XO$ ehk DX on võrdne kolmandikuga ruudu diagonaalist.

Joonestame läbi punkti X ruudu küljega AD paralleelse lõigu ja olgu E selle lõikepunkt DC -ga.

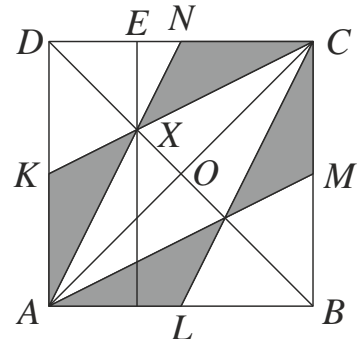
Sarnastest kolmnurkadest DBC ja DXE , saame, et DE on kolmandik ruudu küljest DC .

Kolmnurgad AND ja KCD on võrdsed (veerand ruudust $ABCD$) ning kui kummastki lahutada nelinurk $KXND$, siis saame vastavalt kolmnurgad AXK ja XCN . Need on ka järelikult võrdsed. Seega kolmnurkade AXK ja XCN pindalad on võrdsed.

Konstruksiooni ja sümmeetria tõttu on kõik neli tumedamaks värvitud kolmnurka võrdsed ja seega neist ühe pindala on $\frac{27}{121 \cdot 4}$ cm². Olgu ruudu $ABCD$ külje pikkus a . Sel juhul ühe

tumedamaks värvitud kolmnurga pindala on (näiteks AXK pindala on $\frac{AK \cdot DE}{2}$)

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{121 \cdot 4}, \text{ millest } a^2 = \frac{27}{121 \cdot 4}, \text{ millest } a^2 = \frac{27 \cdot 12}{121 \cdot 4} = \frac{81}{121} \text{ ja } a = \frac{9}{11} \text{ cm.}$$



Lahendus 2.

Tähistame AN ja KC lõikepunkti tähega X ning joonestame lõigu DX .

Kolmnurkade DXN ja NXC pindalad on võrdsed, sest $DN = NC$ ja neile külgedele tõmmatud kõrgused tipust X ühtivad.

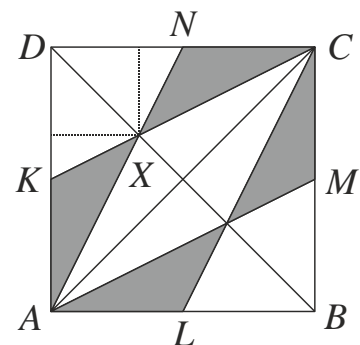
Kolmnurkade AXK ja KXD pindalad on võrdsed, sest $AK = KD$ ja neile külgedele tõmmatud kõrgused tipust X ühtivad.

Kolmnurgad KXD ja DXN on võrdsed (tunnus KNK). Seega kolmnurkade AXK ja XCN pindalad on võrdsed. Konstruksiooni ja sümmeetria tõttu on kõik neli tumedamaks värvitud kolmnurka võrdsed.

Kolmnurga AND pindala on võrdne kolmnurkade AXK , KXD ja DXN pindalade summaga ehk see on võrdne kolme tumedamaks värvitud kolmnurga pindalade summaga.

Tumedamaks värvitud kolmnurkade pindalade summa on $\frac{27}{121}$ cm². Seega kolmnurga AND

pindala on $\frac{27}{121} : 4 \cdot 3 = \frac{27 \cdot 3}{121 \cdot 4} = \frac{81}{484}$ cm².



See on aga ühtlasi veerand ruudu $ABCD$ pindalast. Ruudu $ABCD$ pindala on $\frac{81}{484} \cdot 4 = \frac{81}{121} \text{ cm}^2$.

Järelikult ruudu $ABCD$ külje pikkus on $\sqrt{\frac{81}{121}} = \frac{9}{11} \text{ cm}$.

Lahendus 3.

Tähistame AN ja KC lõikepunkti tähega X ning joonestame diagonaali AC .

Olgu kolmnurga NCX pindala S_1 , kolmnurga KAX pindala S_2 , nelinurga $KXND$ pindala S_3 ning kolmnurga ACX pindala S_4 .

Olgu lõigu DN pikkus a , siis ruudu külje pikkus on $2a$.

Kolmnurga CDK pindala on $\frac{2a \cdot a}{2} = a^2$ ehk $S_1 + S_3 = a^2$.

Samas kolmnurga AND pindala on $\frac{2a \cdot a}{2} = a^2$ ehk $S_2 + S_3 = a^2$.

Järelikult $S_1 = S_2$.

Kolmnurga ANC pindala on $\frac{a \cdot 2a}{2} = a^2$ ehk $S_1 + S_4 = a^2$.

Samas teame, et $S_1 + S_3 = a^2$. Järelikult $S_3 = S_4$.

Konstruksiooni sümmeetria tõttu on kõik neli tumedamaks värvitud kolmnurka võrdsed ja

seega neist ühe pindala on $\frac{27}{121} : 4 = \frac{27}{484} \text{ cm}^2$.

Joonestame lõigu DX .

Kolmnurkade DXN ja NXC pindalad on võrdsed, sest $DN = NC$ ja neile külgedele tõmmatud kõrgused tipust X ühtivad.

Samas kolmnurkade DXK ja KXA pindalad on võrdsed, sest $DK = KA$ ja neile külgedele tõmmatud kõrgused tipust X ühtivad.

Järelikult, nelinurga $KXND$ pindala on kaks korda suurem

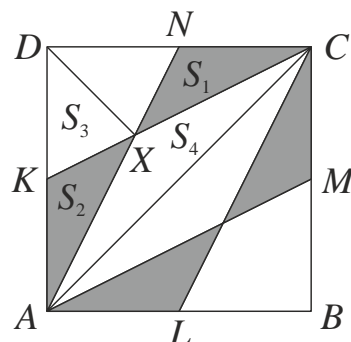
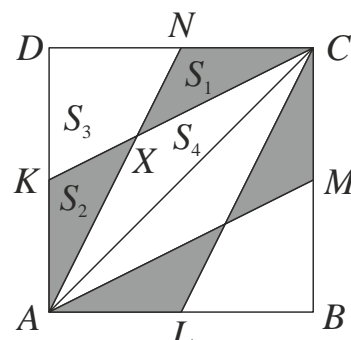
kolmnurga NCX pindalast ehk $S_3 = 2S_1 = 2 \cdot \frac{27}{484} = \frac{27}{242} \text{ cm}^2$.

Saame, et $S_4 = S_3 = \frac{27}{242} \text{ cm}^2$.

Kolmnurga ACD pindala on $\frac{27}{242} + \frac{27}{242} + \frac{27}{484} + \frac{27}{484} = \frac{81}{242} \text{ cm}^2$ ning ruudu $ABCD$ pindala on

$\frac{81}{242} \cdot 2 = \frac{81}{121} \text{ cm}^2$.

Järelikult ruudu $ABCD$ külje pikkus on $\sqrt{\frac{81}{121}} = \frac{9}{11} \text{ cm}$.



Hindamine:

Lahendus 1:

Näidatud, et kahe tumeda kolmnurga ühine punkt ruudu diagonaalil jaotab diagonaali nagu 1 : 2: 2p

Näidatud, et kaks tumedaks värvitud kolmnurka on pindalalt võrdsed: 1p

Tähelepanek, et kõik neli tumedamaks värvitud kolmnurka on konstruktsiooni tõttu võrdsed ja leitud ühe tumedamaks värvitud kolmnurga pindala: 1p

Avaldatud ühe tumedama kolmnurga pindala ruudu külje pikkuse kaudu: 2p.

Leitud ruudu külje pikkus: 1p

7p

Lahendus 2:

Näidatud kahe kolmnurga, mille alused asuvad ruudu samal küljel ja ühine tipp asub ruudu diagonaalil, pindalade võrdsus: 1p

Näidatud, et kaks tumedaks värvitud kolmnurka on pindalalt võrdsed: 1p

Tähelepanek, et ruudu ühest tipust tõmmatud lõik vastaskülje keskpunkti jaotab ruudu kaheks osaks, milledest üks on veerand suure ruudu pindalast: 1p

Näidatud, et suurest ruudust veerandi pindala on kolm korda suurem ühe tumedamaks värvitud kolmnurga pindalast. 2p

Leitud ruudu külje pikkus: 2p

7p

Lahendus 3:

Näidatud, et kaks tumedaks värvitud kolmnurka on pindalalt võrdsed: 1p

Näidatud, et kolmnurga *ACX* ja nelinurga *KXND* pindalad on võrdsed: 1p

Tähelepanek, et kõik neli tumedamaks värvitud kolmnurka on konstruktsiooni tõttu võrdsed ja leitud ühe tumedamaks värvitud kolmnurga pindala: 1p

Näidatud, et nelinurga *KXND* pindala on kaks korda suurem, tumedaks värvitud kolmnurga pindalast: 2p

Leitud ruudu pindala ja ruudu külje pikkus: 2p

7p

Märkus: antud vaid õige vastus: 2p

5. Vastus: Ruumis on 5 valetajat.

Lahendus:

Vaatame, kas saab olla nii, et kõik klounid on tõerääkijad. Sel juhul aga siniste ninadega klounidest esimene valetaks. Tekib vastuolu. Järelikult on klounide seas vähemalt üks valetaja.

Seega esimene sinise ninaga klounidest räägib tõtt. Järelikult kindlasti räägib tõtt ka esimene punase ninaga kloun. Sel juhul aga on kindlasti õigus ka teisel punase ninaga klounil. Nii on meil juba kindlasti kolm tõerääkijat ja ka kolmandal punase ninaga klounil on õigus. Nii edasi liikudes, saame, et kõigil punase ninaga klounidel on õigus.

Järelikult valetajad saavad olla vaid siniste ninadega klounide seas. Kui valetajaid on N , siis N esimest sinise ninaga klouni rääkisid tõtt. Seega valetajate arv saab olla vaid $10 - N$. Seega saame võrduse, et $N = 10 - N$, millest $N = 5$.

Hindamine:

Näidatud, et ruumis ei saa olla vaid tõerääkijad:	1p
Tähelepanek, et esimene sinise ninaga kloun rääkis tõtt:	1p
Tähelepanek, et esimene punase ninaga kloun rääkis tõtt:	1p
Näidatud, et kõik punase ninaga klounid räägivad tõtt:	1p
Järeldus, et valetajad saavad olla vaid sinise ninaga klounide seas:	1p
Leitud, et pooled sinise ninaga klounidest peavad olema valetajad:	<u>2p</u>
	7p

Märkus: antud ainult õige vastus: 2p